کتاب، جزوه ، نمونه سوال
www.ModaresineTehran.com

راهنمای حل محاسبات عددی

Industrial Engineering &
Management

www.industrialem.blogspot.com

$\int \simeq \Sigma$

مؤلفین:
دکتر مسعود نیکوکار
عضو هیئت علمی دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر)

دکتر محمدتقی درویشی
عضو هیئت علمی دانشگاه رازی
(گروه ریاضی)

گسترش علوم پایه

کتاب، جزوه ، نمونه سوال
www.ModaresineTehran.com

فصل سوم

درونیابی و برونیابی

۱ـ هرگاه $x_0, x_1, \cdots, x_n$ نقاط درونیابی و $f_0, f_1, \cdots, f_n$ مقادیر تابع $f(x)$ در این نقاط باشند نشان دهید یک و تنها یک چندجمله‌ای $P(x)$، حداکثر از درجه n، وجود دارد به طوری که:

$$P(x_i) = f_i \quad , \quad i = 0, 1, \cdots, n$$

حل: فرض کنیم $P(x)$ و $Q(x)$ دو چندجمله‌ای از درجه حداکثر n باشند به طوری که

$$P(x_i) = Q(x_i) = f_i \quad , \quad i = 0, 1, \cdots, n \qquad (*)$$

قرار می‌دهیم $h(x) = P(x) - Q(x)$ لذا $h(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه حداکثر n است که باتوجه به رابطه $(*)$ داریم

$$h(x_i) = 0 \quad , \quad i = 0, 1, \cdots, n$$

یعنی x_iها برای $i = 0, 1, \cdots, n$ ریشه‌های چندجمله‌ای $h(x)$ می‌باشند. بنابراین چندجمله‌ای حداکثر از درجه n دارای $n+1$ ریشه (متمایز) است که امکان ندارد مگر

$$h(x) \equiv 0$$

و از آن $P(x) = Q(x)$ یعنی چندجمله‌ای درونیاب f در نقاط x_i منحصربه‌فرد است. لازم به ذکر است که اثبات وجود چندجمله‌ای درونیاب ضروری است، برای این منظور فرض کنید

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

یک چندجمله‌ای از درجه (حداکثر) n است، هرگاه a_0 تا a_n را بتوانیم طوری به دست آوریم که $P(x_i) = f_i$ در این صورت نشان داده‌ایم که یک چندجمله‌ای درونیاب برای تابع f وجود دارد. برای این

کتاب، جزوه ، نمونه سوال
www.ModaresineTehran.com

منظور کافی است یک دستگاه شامل $n+1$ معادله برای تعیین $n+1$ مجهول a_0 تا a_n به دست آوریم. از این‌که می‌خواهیم P بر f در نقاط x_i منطبق باشد لذا $P(x_i) = f_i$ برای $i = 0, 1, \cdots, n$ لذا

$$\begin{aligned}
i = 0 \quad &: \quad f_0 = a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \cdots + a_n x_0^n \\
i = 1 \quad &: \quad f_1 = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \cdots + a_n x_1^n \\
&\vdots \\
i = n \quad &: \quad f_n = a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \cdots + a_n x_n^n
\end{aligned}$$

دستگاه فوق جواب دارد یعنی a_0 تا a_n را می‌توان تعیین نمود هرگاه دترمینان ضرایب دستگاه صفر نباشد یعنی هرگاه

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & & x_n^n \end{vmatrix} \neq 0$$

دترمینان فوق به ترمینان واندرموند معروف است و اثبات می‌شود که مخالف صفر است. لذا a_0 تا a_n قابل تعیین هستند یعنی یک چندجمله‌ای از درجه حداکثر n وجود دارد که در نقاط x_i بر f منطبق است.

۲ـ چندجمله‌ای‌های لاگرانژ را برای تابع جدولی زیر به دست آورید.

x_i	۰	۱	۲	۴
f_i	۳	۲	۷	۵۹

حل: می‌خواهیم چندجمله‌ای لاگرانژ $L_0(x)$ ، $L_1(x)$، $L_2(x)$ و $L_3(x)$ را به دست آوریم:

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(0-1)(0-2)(0-4)} = \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{-8}$$

$$L_0(x) = -\frac{1}{8}(x^3 - 7x^2 + 14x - 8)$$

$$L_1(x) = \frac{(x-0)(x-2)(x-4)}{(1-0)(1-2)(1-4)} = \frac{1}{3}(x^3 - 6x^2 + 8x)$$

$$L_2(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-4)}{(2-0)(2-1)(2-4)} = \frac{x(x-1)(x-4)}{-4} = -\frac{1}{4}(x^3 - 5x^2 + 4x)$$

$$L_3(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(4-0)(4-1)(4-2)} = \frac{x(x-1)(x-2)}{24} = \frac{1}{24}(x^3 - 3x^2 + 2x)$$

کتاب، جزوه ، نمونه سوال
www.ModaresineTehran.com

۳ـ چندجمله‌ای درونیاب تابع جدولی مسأله ۲ را به دست آورده به کمک آن تقریبی از $f(3)$ به دست آورید.

حل:
$$P(x) = L_0(x)f_0 + L_1(x)f_1 + L_2(x)f_2 + L_3(x)f_3$$
$$P(x) = -\frac{3}{8}(x^3 - 7x^2 + 14x - 8) + \frac{2}{3}(x^3 - 6x^2 + 8x) - \frac{7}{4}(x^3 - 5x^2 + 4x) + \frac{59}{24}(x^3 - 3x^2 + 2x)$$
$$P(x) = x^3 - 2x + 3 \qquad f(3) \simeq P(3) = 3^3 - 2 \times 3 + 3 = 24$$

۴ـ برای تابع جدولی زیر تقریبی از $f(0/6)$ به دست آورید.

x_i	۰٫۴	۰٫۵	۰٫۷	۰٫۸
f_i	−۰٫۹۱۶۲۹۱	−۰٫۶۹۳۱۴۷	−۰٫۳۵۶۶۷۵	−۰٫۲۲۳۱۴۴

حل: $n = 3$، ابتدا چندجمله‌ای‌های لاگرانژ $L_0(x)$ ، $L_1(x)$، $L_2(x)$ و $L_3(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \frac{(x-0.5)(x-0.7)(x-0.8)}{(0.4-0.5)(0.4-0.7)(0.4-0.8)}$$
$$= -0.012(x^3 - 2x^2 + 1.31x - 0.28)$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{(x-0.4)(x-0.7)(x-0.8)}{(0.5-0.4)(0.5-0.7)(0.5-0.8)}$$
$$= 0.006(x^3 - 1.9x^2 + 1.16x - 0.224)$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \frac{(x-0.4)(x-0.5)(x-0.8)}{(0.7-0.4)(0.7-0.5)(0.7-0.8)}$$
$$= -0.006(x^3 - 1.7x^2 + 0.92x - 0.16)$$

$$L_3(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{(x-0.4)(x-0.5)(x-0.7)}{(0.8-0.4)(0.8-0.5)(0.8-0.7)}$$
$$= 0.012(x^3 - 1.6x^2 + 0.83x - 0.14)$$

$$P(x) = L_0(x)f_0 + L_1(x)f_1 + L_2(x)f_2 + L_3(x)f_3$$
$$P(x) = -1.683583x^3 - 4.523999x^2 + 5.276054x - 2.410622$$

کتاب، جزوه ، نمونه سوال
www.ModaresineTehran.com

$$f(۰٫۶) \simeq P(۰٫۶) = -۰٫۵۰۹۹۷۵$$

۵ـ با استفاده از چندجمله‌ای‌های لاگرانژ چندجمله‌ای درونیاب تابع جدولی زیر را به دست آورید.

x_i	۰	۱	۲	۴
f_i	۱	۱	۲	۵

حل:

$$L_۰(x) = \frac{(x-۱)(x-۲)(x-۴)}{(۰-۱)(۰-۲)(۰-۴)} = -\frac{۱}{۸}(x^۳ - ۷x^۲ + ۱۴x - ۸)$$
$$L_۱(x) = \frac{(x-۰)(x-۲)(x-۴)}{(۱-۰)(۱-۲)(۱-۴)} = \frac{۱}{۳}(x^۳ - ۶x^۲ + ۸x)$$
$$L_۲(x) = \frac{(x-۰)(x-۱)(x-۴)}{(۲-۰)(۲-۱)(۲-۴)} = -\frac{۱}{۴}(x^۳ - ۵x^۲ + ۴x)$$
$$L_۳(x) = \frac{(x-۰)(x-۱)(x-۲)}{(۴-۰)(۴-۱)(۴-۲)} = \frac{۱}{۲۴}(x^۳ - ۳x^۲ + ۲x)$$

$$P(x) = -\frac{۱}{۸}(x^۳ - ۷x^۲ + ۱۴x - ۸) + \frac{۱}{۳}(x^۳ - ۶x^۲ + ۸x) - \frac{۱}{۲}(x^۳ - ۵x^۲ + ۴x)$$
$$+ \frac{۵}{۲۴}(x^۳ - ۳x^۲ + ۲x)$$

$$P(x) = \frac{۱}{۱۲}(-x^۳ + ۹x^۲ - ۸x + ۱۲)$$

۶ـ برای تابع جدولی مسأله ۵ تفاضلات تقسیم شده زیر را به دست آورید.

الف. $f[۲,۴]$ ب. $f[۱,۲,۴]$ پ. $f[۰,۱,۲]$
ت. $f[۰,۱,۲,۴]$

حل:

الف) $$f[۲,۴] = \frac{f_۲ - f_۳}{۲-۴} = \frac{۲-۵}{۲-۴} = \frac{۳}{۲}$$

ب) $$f[۱,۲,۴] = \frac{f[۱,۲] - f[۲,۴]}{۱-۴} = \frac{\frac{f_۱ - f_۲}{۱-۲} - \frac{f_۲ - f_۳}{۲-۴}}{۱-۴} = \frac{\frac{۱-۲}{۱-۲} - \frac{۳}{۲}}{-۳} = \frac{۱}{۶}$$

پ) $$f[۰,۱,۲] = \frac{f[۰,۱] - f[۱,۲]}{۰-۲} = \frac{\frac{f_۰ - f_۱}{۰-۱} - \frac{f_۱ - f_۲}{۱-۲}}{۰-۲} = \frac{-۱}{-۲} = \frac{۱}{۲}$$

ت) $$f[۰,۱,۲,۴] = \frac{f[۰,۱,۲] - f[۱,۲,۴]}{۰-۴} = \frac{\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۶}}{-۴} = -\frac{۱}{۱۲}$$

کتاب، جزوه ، نمونه سوال
www.ModaresineTehran.com

۷ـ به روش تفاضلات تقسیم شده نیوتن چندجمله‌ای‌های درونیاب توابع جدولی مسائل ۴،۲ و ۵ را به دست آورید.

حل: برای مسأله ۲ داریم

تفاضلات مرتبه

x_i	f_i	اول	دوم	سوم
۰	۳			
		۱−		
۱	۲		۳	
		۵		۱
۲	۷		۷	
		۲۶		
۴	۵۹			

$$P(x) = ۳ - x + ۳x(x-۱) + x(x-۱)(x-۲) = x^۳ - ۲x + ۳$$

چندجمله‌ای‌های مسائل ۴ و ۵ به طور مشابه به دست می‌آیند.

۸ـ به روش تفاضلات تقسیم شده نیوتن چندجمله‌ای درونیاب تابع جدولی زیر را به دست آورید.

x_i	۱−	۱	۲
f_i	۳−	۰	۴

حل:

x_i	f_i	اول	دوم
۱−	۳−		
		$\frac{۳}{۲}$	
۱	۰		$\frac{۵}{۶}$
		۴	
۲	۴		

$$P(x) = -۳ + (x+۱)(\frac{۳}{۲}) + (x+۱)(x-۱)(\frac{۵}{۶})$$

$$= -۳ + \frac{۳}{۲}x + \frac{۳}{۲} + \frac{۵}{۶}x^۲ - \frac{۵}{۶}$$

$$P(x) = \frac{۱}{۶}(۵x^۲ + ۹x - ۱۴)$$

۹ـ به کمک فرمول‌های پیشرو و پسرو نیوتن تقریب‌هایی از $f(۱٫۱)$ و $f(۲)$ برای تابع جدولی زیر به دست آورید.

x_i	۱	۱٫۳	۱٫۶	۱٫۹	۲٫۲
f_i	۰٫۷۶۵۱۹۷۷	۰٫۶۲۰۰۸۶۰	۰٫۴۵۵۴۰۲۲	۰٫۲۸۱۸۱۸۶	۰٫۱۱۰۳۶۲۳

کتاب، جزوه ، نمونه سوال
www.ModaresineTehran.com

حل:

x_i	f_i	Δ	$\Delta^۲$	$\Delta^۳$	$\Delta^۴$
۱	۰٫۷۶۵۱۹۷۷				
		−۰٫۱۴۵۱۱			
			−۰٫۰۱۹۵۷		
۱٫۳	۰٫۶۲۰۰۸۶۰				
		−۰٫۱۶۴۶۸		۰٫۰۱۶۰۷	
			−۰٫۰۰۸۹		−۰٫۰۰۳۸۹
۱٫۶	۰٫۴۵۵۴۰۲۲				
		−۰٫۱۷۳۵۸		۰٫۰۰۶۷۸	
			−۰٫۰۰۲۱۲		
۱٫۹	۰٫۲۸۱۸۱۸۶				
		−۰٫۱۷۱۴۶			
۲٫۲	۰٫۱۱۰۳۶۳۲				

$$P(x) = ۰٫۷۶۵۱۹۷۷ - ۰٫۱۴۵۱۱s + \frac{s(s-۱)}{۲}(-۰٫۰۱۹۵۷) + \frac{s(s-۱)(s-۲)}{۶}(۰٫۰۱۶۰۷) + \frac{s(s-۱)(s-۲)(s-۳)}{۲۴}(-۰٫۰۰۳۸۹)$$

$$P(x) = -۰٫۰۰۰۱۶s^۴ + ۰٫۰۰۲۷۳۸s^۳ - ۰٫۰۱۶۸۷۹s^۲ - ۰٫۱۳۰۸۰۹s + ۰٫۷۶۵۱۹۷۷$$

داریم:

$$x = ۱ + ۰٫۳s \rightarrow ۰٫۳s = x - ۱ \rightarrow s = \frac{x-۱}{۰٫۳}$$

لذا

$$x = ۱٫۱ \Rightarrow s = \frac{۱}{۳}$$

$$x = ۲ \Rightarrow s = \frac{۱}{۰٫۳}$$

بنابراین

$$f(۱٫۱) \simeq ۰٫۷۱۹۸۱۹ \quad (۶D)$$

$$f(۲) = -۰٫۰۱۹۷۵۳ + ۰٫۱۰۱۰۳۷ - ۰٫۱۸۷۵۴۶ - ۰٫۴۳۶۰۳ + ۰٫۷۶۵۱۹۷۷$$

$$f(۲) \simeq ۰٫۲۲۳۲۷۸$$

کتاب، جزوه ، نمونه سوال
www.ModaresineTehran.com

۱۰ـ به کمک شکل دترمینانی چندجمله‌ای درونیاب، چندجمله‌ای درونیاب توابع جدولی مسائل ۲، ۵ و ۸ را به دست آورید.

حل: برای مسأله ۲

$$\begin{vmatrix} P(x) & ۱ & x & x^۲ & x^۳ \\ ۳ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۲ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۷ & ۱ & ۲ & ۴ & ۸ \\ ۵۹ & ۱ & ۴ & ۱۶ & ۶۴ \end{vmatrix} = ۰$$

برای مسأله ۵

$$\begin{vmatrix} P(x) & ۱ & x & x^۲ & x^۳ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۲ & ۴ & ۸ \\ ۵ & ۱ & ۴ & ۱۶ & ۶۴ \end{vmatrix} = ۰$$

برای مسأله ۸

$$\begin{vmatrix} P(x) & ۱ & x & x^۲ \\ -۳ & ۱ & -۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۴ & ۱ & ۲ & ۴ \end{vmatrix} = ۰$$

باتوجه به مرتبه کم دترمینان مربوط به مسأله ۸ برای این مسأله داریم:

$$P(x)\begin{vmatrix} ۱ & -۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۴ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -۳ & -۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ \\ ۴ & ۲ & ۴ \end{vmatrix} + x\begin{vmatrix} -۳ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ \\ ۴ & ۱ & ۴ \end{vmatrix} - x^۲\begin{vmatrix} -۳ & ۱ & -۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ \\ ۴ & ۱ & ۲ \end{vmatrix} = ۰$$

و از آن $P(x) = \frac{۱}{۶}(۵x^۲ + ۹x - ۱۴)$

۱۱ـ برای تابع جدولی مسأله ۲ مقادیر $f(۰/۵)$ و $f(۴/۳)$ را تخمین بزنید.

حل: $P(x) = x^۳ - ۲x + ۳$

درونیابی $f(۰/۵) = ۰/۱۲۵ - ۱ + ۳ = ۲/۱۲۵$

برونیابی $f(۴/۳) \simeq ۷۹/۵۰۷ - ۸/۶ + ۳ \simeq ۷۳/۹۰۷$

کتاب، جزوه ، نمونه سوال
www.ModaresineTehran.com

۱۲ـ به کمک چندجمله‌ای درونیاب به دست آمده در مسأله ۸ برای $f(۲٫۴)$ و $f(۰)$ مقادیری به دست آورید.

حل:

$$P(x) = \frac{۱}{۶}(۵x^{۲} + ۹x - ۱۴)$$

$$f(۲٫۴) \simeq \frac{۱}{۶}(۲۸٫۸ + ۲۱٫۶ - ۱۴) = ۶٫۰۶۷$$

$$f(۰) \simeq \frac{۱}{۶}(-۱۴) \simeq -۲٫۳۳۳$$

۱۳ـ مقادیر خواسته شده در مسائل ۱۱ و ۱۲ را به کمک فرمولهای (۱۵) و (۱۶) به دست آورید.

حل:

x_i	۰	۱	۲	۴
f_i	۳	۲	۷	۵۹

$$\bar{y} = ۳ + \frac{x - ۰}{۱ - ۰}(۲ - ۳) \Rightarrow \bar{y} = ۳ - x \qquad \bar{y} = ۳ - ۰٫۵ = ۲٫۵$$

$$f(۰٫۵) = ۲٫۵$$

$$\bar{y} = ۷ + \frac{x - ۲}{۴ - ۲}(۵۹ - ۷) \Rightarrow \bar{y} = ۷ + \frac{x - ۲}{۲}(۵۲)$$

$$f(۴٫۳) = ۷ + \frac{۲٫۳}{۲}(۵۲) = ۶۶٫۸$$

x_i	-۱	۱	۲
f_i	-۳	۰	۴

$$\bar{y} = -۳ + \frac{x + ۱}{۱ + ۱}(۳) \Rightarrow \bar{y} = -۳ + \frac{x + ۱}{۲}(۳) \Rightarrow f(۰) = -۱٫۵$$

$$\bar{y} = ۰ + \frac{x - ۱}{۲ - ۱}(۴ - ۰) \Rightarrow \bar{y} = ۴(x - ۱) \Rightarrow f(۲٫۴) = ۵٫۶$$

۱۴ـ با به دست آوردن یک چندجمله‌ای درجه چهار که تابع جدولی زیر را درونیابی می‌کند مقادیر $f(۵)$، $f(۶)$ و $f(۷)$ را پیشگویی (برونیابی) کنید.

x_i	۰	۱	۲	۳	۴
f_i	۱	-۱	۱	-۱	۱

کتاب، جزوه ، نمونه سوال
www.ModaresineTehran.com

حل:

x_i	f_i	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
0	1				
		-2			
1	-1		4		
		2		-8	
2	1		-4		16
		-2		8	
3	-1		4		
		2			
4	1				

$$P(x) = 1 + (-2)s + 4\frac{s(s-1)}{2} - 8\frac{s(s-1)(s-2)}{6} + 16\frac{s(s-1)(s-2)(s-3)}{24}$$

$$P(x) = 1 - 2s + 2s^2 - 2s - \frac{8}{6}s^3 + 4s^2 - \frac{8}{3}s + \frac{2}{3}s^4 - 4s^3 + \frac{22}{3}s^2 - 4s$$

$$P(x) = \frac{2}{3}s^4 - \frac{16}{3}s^3 + \frac{40}{3}s^2 - \frac{32}{3}s + 1$$

$$x = x_0 + sh \Rightarrow x = 0 + s \Rightarrow x = s$$

$$P(x) = \frac{2}{3}x^4 - \frac{16}{3}x^3 + \frac{40}{3}x^2 - \frac{32}{3}x + 1$$

$$P(x) = \frac{1}{3}(2x^4 - 16x^3 + 40x^2 - 32x + 3)$$

$$f(5) = \frac{1}{3}(1250 - 2000 + 1000 - 160 + 3) = 31$$

$$f(6) = \frac{1}{3}(2592 - 3456 + 1440 - 192 + 3) = 129$$

$$f(7) = \frac{1}{3}(4802 - 5488 + 1960 - 224 + 3) = 351$$

۱۵ـ مانند مسأله ۱۴ در مورد تابع جدولی زیر عمل نموده و مقادیر $f(5)$، $f(6)$ و $f(7)$ را پیشگویی کنید.

x_i	0	1	2	3	4
f_i	0	0	1	0	0

کتاب، جزوه ، نمونه سوال
www.ModaresineTehran.com

حل:

x_i	f_i	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
0	0				
		0			
1	0		1		
		1		−3	
2	1		−2		6
		−1		3	
3	0		1		
		0			
4	0				

$$f(x) = \frac{s(s+1)}{2} + \frac{3s(s+1)(s+2)}{6} + \frac{6(s)(s+1)(s+2)(s+3)}{24}$$

$$f(x) = \frac{1}{4}s^4 + 2s^3 + \frac{19}{4}s^2 + 3s$$

$$f(x) = \frac{1}{4}(x-4)^4 + 2(x-4)^3 + \frac{19}{4}(x-4)^2 + 3(x-4)$$

$$f(5) = \frac{1}{4} + 2 + \frac{19}{4} + 3 = 10$$

$$f(6) = \frac{1}{4}(16) + 2(8) + \frac{19}{4}(4) + 6 = 45$$

$$f(7) = \frac{1}{4}(81) + 2(27) + \frac{19}{4}(9) + 3(3) = 126$$

کتاب، جزوه ، نمونه سوال
www.ModaresineTehran.com

«مسائل تکمیلی فصل سوم»

۱ـ اگر مقدار تابع f در x_0 برابر f_0 و در x_1 برابر f_1 باشد چندجمله‌ای درونیاب f را در نقاط x_0 و x_1 به دست آورید و به کمک آن تخمینی از $f\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right)$ را محاسبه کنید.

۲ـ در جدول زیر تقریبی از $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ و $f\left(\frac{3}{2}\right)$ برآورد کنید:

x_i	-1	0	1	2
f_i	-2	-1	0	7

۳ـ در چندجمله‌ای لاگرانژ اگر $F(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$ باشد نشان دهید

$$L_j(x)=\frac{F(x)}{(x-x_j)F'(x)}$$

۴ـ درجه چندجمله‌ای مربوط به تابع جدولی زیر را حساب کنید:

x_i	0	1	2	3	4	5
f_i	3	2	7	24	59	118

۵ـ اگر $f(x)=\sin(\frac{\pi x}{2})$ چندجمله‌ای درونیاب f را در نقاط $x_0=-1$ ، $x_1=0$ ، $x_2=1$ به دست آورید و یک کران بالا برای خطای آن حساب کنید.

۶ـ اگر $\{y_0,y_1,\cdots,y_n\}=\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$ ثابت کنید:

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_n]=f[y_0,y_1,\cdots,y_n]$$

(یعنی در تفاضلات تقسیم شده ترتیب x_iها اهمیتی ندارد.)

۷ـ اگر $f(x)=x^{n+1}$ و $p(x)$ چندجمله‌ای درونیاب f در نقاط متمایز x_0 تا x_n باشد نشان دهید:

الف) $p(x)=x^{n+1}-(x-x_0)\cdots(x-x_n)$ ب) $f[x,x_0,\cdots,x_n]=1$

۸ـ به کمک جدول زیر یک برآورد از $\sin 5^\circ$ و $\sin 15^\circ$ به دست آورید:

x_i	0	10	20	30
$\sin x_i$	0	0.1736	0.342	0.5

کتاب، جزوه ، نمونه سوال
www.ModaresineTehran.com

۹- برای تابع جدولی زیر مقدارهای $f[-۱,۱,۲]$ و $f[۱,۲,۳]$ را حساب کنید:

x_i	-۱	۱	۲	۳
f_i	$-۱/۱$	$۳/۲$	$۱/۲$	$۳۱/۲$

۱۰- در چه صورتی چندجمله‌ای درونیاب تابع f در نقاط متمایز $x_n, \cdots, x_۱, x_۰$ خود تابع f است.

۱۱- تابع $\cos x$ را با چه اندازه گام h باید جدول‌بندی کرد تا خطای حاصل از درونیابی نابیشتر از $\frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۴}$ شود.

۱۲- به کمک چندجمله‌ای درونیاب $f(x) = x^۲ + ۱$ کسر $\frac{x^۲+۱}{x(x-۱)(x-۲)(x-۳)}$ را تجزیه کنید.

۱۳- فرض کنید $f(x) = x^k$، چندجمله‌ای درونیاب f را در نقاط $x_n, \cdots, x_۱, x_۰$ به دست آورید.

۱۴- با استفاده از مقادیر $\cos ۶۰^\circ = \frac{۱}{۲}$ و $\cos ۴۵^\circ = \frac{۱}{\sqrt{۲}}$ تقریبی از $\cos ۵۰^\circ$ به دست آورید.

۱۵- تابع $\sin x$ را با چه اندازه گام h باید جدول‌بندی کرد تا خطای حاصل از درونیابی نابیشتر از $\frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۶}$ شود.

۱۶- با استفاده از تفاضلات تقسیم شده چندجمله‌ای درجه سومی را برحسب y چنان بسازید که در $y = ۰, ۱, ۱۶, ۸۱$ بر $x = y^{\frac{۱}{۴}}$ منطبق شود. مقدار چندجمله‌ای را برای $y = ۶۴$ حساب کنید.

۱۷- با فرض این‌که

$$f(-۲) = ۴۶ \ , \ f(-۱) = ۴ \ , \ f(۱) = ۴ \ , \ f(۳) = ۱۵۶ \ , \ f(۴) = ۴۸۴$$

برای محاسبه $f(۰)$ از دستور لاگرانژ استفاده کنید.

۱۸- به کمک دستور تفاضلات تقسیم شده مقدار $f(۰)$ را در جدول زیر حساب کنید:

x_i	-۲	-۱	۱	۳
f_i	۴۶	۴	۴	۱۵۶

۱۹- معادله $x - ۹^{-x} = ۰$ یک جواب در $[۰, ۱]$ دارد. چندجمله‌ای درونیاب را در نقاط زیر برای تابع $f(x) = x - ۹^{-x}$ بیابید.

$$x_۰ = ۰ \quad , \quad x_۱ = ۰/۵ \quad , \quad x_۲ = ۱$$

کتاب، جزوه ، نمونه سوال
www.ModaresineTehran.com

با مساوی صفر قرار دادن چندجمله‌ای درونیاب و حل معادله یک جواب تقریبی برای ریشهٔ معادله بیابید.

۲۰ـ ثابت کنید اگر f یک چندجمله‌ای از درجه k باشد آنگاه برای $n > k$ داریم:

$$f[x_۰, x_۱, \cdots, x_n] = ۰$$

۲۱ـ چندجمله‌ای درونیاب نیوتن را برای جدول زیر تعیین کنید:

x	۰	۱	۲	۷
y	۵۱	۳	۱	۲۰۱

۲۲ـ به کمک درونیابی لاگرانژ چندجمله‌ای درجه ۳ یا کمتر را که با $f(x) = x^۴$ در $x_۰ = ۱$ ، $x_۱ = ۶$ و $x_۲ = ۷$ یکی است محاسبه کنید.

۲۳ـ چندجمله‌ای درونیاب تابع $f(x) = \sqrt[۳]{x}$ را یکبار در نقاط ۱ ، ۸ و ۲۷ و یک بار هم در نقاط ۰، ۱، ۸ و ۲۷ به دست آورید. چندجمله‌ای درونیاب اول را $p_۲(x)$ و دومی را $p_۳(x)$ بنامید. $p_۲(۱۴)$ و $p_۳(۱۴)$ را به دست آورید. چرا خطای $p_۲(۱۴)$ بیشتر از خطای $p_۳(۱۴)$ است.

۲۴ـ داده‌های جدول زیر را درنظر بگیرید:

x	-۱	۰	۱	۲
$f(x)$	-۳	-۱	۰	۵

چندجمله‌ای درونیاب جدول فوق را بیابید و $f(۰٫۵)$ و $f(۱٫۵)$ را تقریب بزنید.

۲۵ـ چندجمله‌ای درونیاب تابع جدولی زیر از چه درجه‌ای است؟ با افزودن نقطه $(x_۳, f_۳) = (۳٫۰, ۳٫۰۰)$ به جدول، چندجمله‌ای درونیاب را با استفاده از محاسبات قبلی به دست آورید.

x_i	۰٫۰	۱٫۰	۲٫۰
f_i	۰٫۰۰	۰٫۷۵	۲٫۲۵

۲۶ـ چندجمله‌ای درونیاب تابع جدولی زیر را به دست آورده و تقریبی از $f(۰٫۸)$ و $f(۰٫۴)$ ارائه نمایید.

x_i	۰٫۰۰	۰٫۲۵	۰٫۵۰	۰٫۷۵	۱٫۰۰
f_i	۰٫۰۰	۰٫۳۵	۰٫۱۵	۰٫۲۰	۰٫۱۸

۲۷ـ چندجمله‌ای درونیاب تابع جدولی زیر را به دست آورده و تقریبی از $f(۰٫۵)$ و $f(۳٫۵)$ ارائه نمایید.

x_i	۰	۱	۲	۳	۴
f_i	۰	۰٫۵	۷	۲۵٫۵	۶۲

کتاب، جزوه ، نمونه سوال
www.ModaresineTehran.com

۲۸ـ نشان دهیدکه اگر f یک تابع چند جمله‌ای درجهٔ n به صورت $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ باشد و x_iها دو به دو متمایز باشند آن‌گاه

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_n] = a_n$$

۲۹ـ تقریبی از مشتق تابع $f(x)$ را در نقاط $x = ۰/۱$ و $x = ۰/۵$ به دست آورید هرگاه f به صورت جدولی زیر داده شده باشد:

x_i	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵
f_i	۰/۹۹۵۰	۰/۹۸۰۰	۰/۹۵۵۳	۰/۹۲۱۰	۰/۹۸۷۷۵

کتاب، جزوه ، نمونه سوال
www.ModaresineTehran.com

فصل چهارم

مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری عددی

۱ـ تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را درنظر بگیرید. فاصله $[۱, ۱/۳۰]$ را به صورت $x = ۱/۰(۰/۰۵)۱/۳۰$ جدول‌بندی کنید و مقادیر خواسته شده زیر را به دست آورید.

الف. با استفاده از رابطه (۸) مقدار $f'(۱)$ را بدست آورید.

حل:

$$f'_i \cong \frac{f_{i+۱}-f_i}{h}$$

$$f'(۱) \cong \frac{f(۱/۰۵)-f(۱)}{۰/۰۵} = \frac{\sqrt{۱/۰۵}-۱}{۰/۰۵} = ۰/۴۹۴$$

ب. با استفاده از رابطه (۹) مقدار $f'(۱)$ را بدست آورید.

حل:

$$f'_i \cong \frac{۲f_{i+۱}-\frac{۱}{۲}f_{i+۲}-\frac{۳}{۲}f_i}{h}$$

$$f'(۱) \cong \frac{۲\sqrt{۱/۰۵}-\frac{۱}{۲}\sqrt{۱/۱}-\frac{۳}{۲}}{۰/۰۵} = ۰/۴۹۹۷$$

پ. با استفاده از رابطه (۱۰) یک تقریب برای $f''(۱)$ بدست آورید.

حل:

$$f''_i \cong \frac{f_{i+۲}-۲f_{i+۱}+f_i}{h^۲}$$

$$f''(۱) \cong \frac{\sqrt{۱/۱}-۲\sqrt{۱/۰۵}+۱}{(۰/۰۵)^۲} = -\frac{۰/۰۰۰۵۸۱۳۰۵}{۰/۰۰۲۵} = -۰/۲۳۲۵$$

۲ـ برای تابع مسأله ۱ با استفاده از رابطه (۸) مقادیری برای $f'_i, i=۱,۲,۳,۴,۵$ به دست آورید.

کتاب، جزوه ، نمونه سوال
www.ModaresineTehran.com

حل:

x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^2 f_i$
۱	۱		
		۰٫۰۲۴۶۹	
۱٫۰۵	$\sqrt{۱٫۰۵}$		−۰٫۰۰۰۵۸
		۰٫۰۲۴۱۱	
۱٫۱	$\sqrt{۱٫۱}$		−۰٫۰۰۰۵۳۹
		۰٫۰۲۳۵۷۱	
۱٫۱۵	$\sqrt{۱٫۱۵}$		−۰٫۰۰۰۵۰۷
		۰٫۰۲۳۰۶۴	
۱٫۲	$\sqrt{۱٫۲}$		−۰٫۰۰۰۴۷۶
		۰٫۰۲۲۵۸۸	
۱٫۲۵	$\sqrt{۱٫۲۵}$		−۰٫۰۰۰۴۴۷
		۰٫۰۲۲۱۴۱	
۱٫۳	$\sqrt{۱٫۳}$		

$f'_1 = ۰٫۴۹۳۸$ $\quad f'_2 = ۰٫۴۸۲$ $\quad f'_3 = ۰٫۴۷۰۲$

$f'_4 = ۴۶۱۲۸$ $\quad f'_5 = ۰٫۴۵۱۷۶$

۳ـ مسأله ۲ را با استفاده از رابطه ۹ حل کنید.

حل:

$$f'_i \simeq \frac{1}{h}\left[\Delta f_i - \frac{1}{2}\Delta^2 f_i\right]$$

$f'_1 = ۰٫۴۹۹۶$ $\quad f'_2 = ۰٫۴۸۷۵۹$

$f'_3 = ۰٫۴۷۶۴۶$ $\quad f'_4 = ۰٫۴۶۶۰۴$ $\quad f'_5 = ۰٫۴۵۶۲۳$

۴ـ برای تابع مسأله ۱ با استفاد از رابطه ۱۰ مقادیری برای $i = ۱,۲,۳,۴,۵$ ، f''_i به دست آورید.

حل:

$$f''_i = \frac{\Delta^2 f_i}{h^2}$$

$f''_1 = -۰٫۲۳۲$ $\quad f''_2 = -۰٫۲۱۵۶$ $\quad f''_3 = -۰٫۲۰۲۲۸$ $\quad f''_4 = -۰٫۱۹۰۴$

$f''_5 = -۰٫۱۷۸۸$

۵ـ برای تابع مسأله ۱ با استفاده از رابطه ۱۲ تقریبی برای $f'(۱٫۱۲۵)$ به دست آورید.

کتاب، جزوه ، نمونه سوال
www.ModaresineTehran.com

حل:

$$f'(x_i + \frac{h}{۲}) \cong \frac{f_{i+۱} - f_i}{h}$$

$$f'(۱/۱ + ۰/۰۲۵) \cong \frac{f(۱/۱۵) - f(۱/۱)}{۰/۰۵} = \frac{\sqrt{۱/۱۵} - \sqrt{۱/۱}}{۰/۰۵} = ۰/۴۷۱۴$$

۶ـ انتگرال $\int_۱^{۱/۳} \sqrt{x}dx$ را درنظر بگیرید مقادیر خواسته شده را با $(۵D)$ به دست آورید.

الف. $T(۰/۳)$ ب. $T(۰/۱۵)$ پ. $T(۰/۱)$ $T(۰/۰۵)$

حل:

$$T(۰/۳) = \frac{۰/۳}{۲}[f(۱) + f(۱/۳)] = ۰/۱۵[۱ + \sqrt{۱/۳}] = \frac{۰/۶۴۲۰۵۱}{۲} = ۰/۳۲۱۰۲$$

$$T(۰/۱۵) = \frac{۰/۱۵}{۲}[f(۱) + ۲f(۱/۱۵) + f(۱/۳)] = ۰/۰۷۵[۱ + ۲\sqrt{۱/۱۵} + \sqrt{۱/۳}]$$
$$= ۰/۳۲۱۳۷$$

$$T(۰/۱) = \frac{۰/۱}{۲}[f(۱) + ۲f(۱/۱) + ۲f(۱/۲) + f(۱/۳)]$$
$$= ۰/۰۵[۱ + ۲\sqrt{۱/۱} + ۲\sqrt{۱/۲} + \sqrt{۱/۳}] = ۰/۳۲۱۴$$

$$T(۰/۰۵) = \frac{۰/۵}{۲}[f(۱) + ۲f(۱/۰۵) + ۲f(۱/۱) + ۲f(۱/۱۵) + ۲f(۱/۲)$$
$$+ ۲f(۱/۲۵) + f(۱/۳)]$$
$$= \frac{۰/۰۵}{۲}[۱ + ۲\sqrt{۱/۰۵} + ۲\sqrt{۱/۱} + ۲\sqrt{۱/۱۵}$$
$$+ ۲\sqrt{۱/۲} + ۲\sqrt{۱/۲۵} + \sqrt{۱/۳}] = ۰/۳۲۱۴۷$$

۷ـ با استفاده از قاعده ذوزنقه‌ای مقدار $\int_۰^۱ \frac{dx}{۱+x}$ را به ازای $h = ۰/۲۵, h = ۰/۵, h = ۱$ با $(۴D)$ به دست آورید.

حل:

$$T(۱) = \frac{۱}{۲}[f(۰) + f(۱)] = ۰/۷۵۰۰$$

$$T(۰/۵) = \frac{۰/۵}{۲}[f(۰) + ۲f(۰/۵) + f(۱)]$$
$$= \frac{۰/۵}{۲}[۱ + ۱/۳۳۳۳ + \frac{۱}{۲}] = ۰/۷۰۸۳$$

$$T(۰/۲۵) = \frac{۰/۲۵}{۲}[f(۰) + ۲f(۰/۲۵) + ۲f(۰/۵) + ۲f(۰/۷۵) + f(۱)]$$
$$= \frac{۰/۲۵}{۲}[۱ + ۲[\frac{۱}{۱/۲۵} + \frac{۱}{۱/۵} + \frac{۱}{۱/۷۵}] + \frac{۱}{۲}] = ۰/۶۹۷۰$$

کتاب، جزوه ، نمونه سوال
www.ModaresineTehran.com

۸ـ مقدار $\int_0^1 x^2 dx$ را به روش ذوزنقه‌ای و به ازای $h = 1 , \frac{1}{2} , \frac{1}{4}$ حساب کنید.

حل:

$$T(1) = \frac{1}{2}[f(0) + f(1)] = \frac{1}{2}$$

$$T(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}[f(0) + 2f(\frac{1}{2}) + f(1)] = \frac{3}{8}$$

$$T(\frac{1}{4}) = \frac{1}{8}[f(0) + 2[f(\frac{1}{4}) + f(\frac{1}{2}) + f(\frac{3}{4})] + f(1)]$$

$$= \frac{1}{8}[0 + 2[\frac{1}{16} + \frac{1}{4} + \frac{9}{16}] + 1] = \frac{11}{32}$$

۹ـ تقریبی از $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ را با $T(\frac{\pi}{8})$ به دست آورید.

$$T(\frac{\pi}{8}) = \frac{\pi}{16}[f(0) + 2[f(\frac{\pi}{8}) + f(\frac{\pi}{4}) + f(3\frac{\pi}{8})] + f(\frac{\pi}{2})] = 0{,}987111$$

۱۰ـ تقریب‌هایی از $\int_1^3 \frac{dx}{x}$ را با $T(\frac{1}{2})$ و $T(1)$ به دست آورید.

حل:

$$T(1) = \frac{1}{2}[f(1) + 2f(2) + f(3)] = \frac{7}{6}$$

$$T(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}\left[f(1) + 2f(\frac{3}{2}) + 2f(\frac{5}{2}) + f(3)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[1 + \frac{32}{15} + \frac{1}{3}\right] = \frac{52}{60}$$

۱۱ـ مقدار انتگرال $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ را با $S(0{,}1)$ به دست آورید.

حل:

$$S(0{,}1) = \frac{0{,}1}{3}[f(0) + 4f(0{,}1) + 2f(0{,}2) + 4f(0{,}3) + 2f(0{,}4) + 4f(0{,}5)$$
$$+ 2f(0{,}6) + 4f(0{,}7) + 2f(0{,}8) + 4f(0{,}9) + f(1)] = 0{,}69315023 \simeq 0{,}6931$$

۱۲ـ مقدار انتگرال $\int_0^1 x^2 dx$ را با $S(0{,}5)$ به دست آورید.

حل: $S(0{,}5) = \frac{0{,}5}{3}[f(0) + 4f(0{,}5) + f(1)] = \frac{0{,}5}{3}[0 + 4(0{,}5)^2 + 1] = 0{,}25$

کتاب، جزوه ، نمونه سوال
www.ModaresineTehran.com

۱۳ـ مقدار انتگرال $\int_{0}^{1} \frac{\sin x}{x} dx$ را با $S(0/25)$ را به دست آورید. (قرار دهید $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$)

حل: باتوجه به حد بیان شده داریم $f(0) = 1$ لذا

$$S(0/25) = \frac{0/25}{3}[f(0) + 4f(0/25) + 2f(0/5) + 4f(0/75) + f(1)]$$

$$= \frac{0/25}{3}\left[1 + 4\frac{\sin 0/25}{0/25} + 2\frac{\sin 0/5}{0/5} + 4\frac{\sin 0/75}{0/75} + \sin 1\right] = 0/946086 \simeq 0/9461$$

۱۴ـ مقدار انتگرال $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ را به روش سیمپسون و $h = \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{16}, \frac{\pi}{32}, \frac{\pi}{64}$ به دست آورید.

حل:

$$S(\frac{\pi}{8}) = \frac{\pi}{24}\left[f(0) + 4f(\frac{\pi}{8}) + 2f(\frac{\pi}{4}) + 4f(\frac{3\pi}{8}) + f(\frac{\pi}{2})\right]$$

$$= \frac{\pi}{24}\left[\sin 0 + 4\sin\frac{\pi}{8} + 2\sin\frac{\pi}{4} + 4\sin\frac{3\pi}{8} + \sin\frac{\pi}{2}\right] = 1/000134585$$

$$S(\frac{\pi}{16}) = \frac{\pi}{48}[\sin 0 + 4\sin\frac{\pi}{16} + 2\sin\frac{\pi}{8} + 4\sin\frac{3\pi}{16} + 2\sin\frac{\pi}{4} + 4\sin\frac{5\pi}{16}$$
$$+ 2\sin\frac{3\pi}{8} + 4\sin\frac{7\pi}{16} + \sin\frac{\pi}{2}] = 1/0000081$$

$$S(\frac{\pi}{32}) = \frac{\pi}{96}[\sin 0 + 4\sin\frac{\pi}{32} + 2\sin\frac{\pi}{16} + 4\sin\frac{3\pi}{32} + 2\sin\frac{\pi}{8} + 4\sin\frac{5\pi}{32}$$
$$+ 2\sin\frac{4\pi}{32} + 4\sin\frac{7\pi}{32} + 2\sin\frac{\pi}{4} + 4\sin\frac{9\pi}{32} + 2\sin\frac{10\pi}{32} + 4\sin\frac{11\pi}{32}$$
$$+ 2\sin\frac{12\pi}{32} + 4\sin\frac{13\pi}{32} + 2\sin\frac{14\pi}{32} + 4\sin\frac{15\pi}{32} + \sin\frac{\pi}{2}] = 0/99999983$$

به طور مشابه $S(\frac{\pi}{64}) = 1/00000003$.

۱۵ـ تابع جدولی زیر را درنظر بگیرید مقدار $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$ را به روش ذوزنقه و روش سیمپسون به دست آورید.

x_i	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{12}$	$\frac{3\pi}{12}$	$\frac{4\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$
f_i	0	$0/25882$	$0/5$	$0/70711$	$0/86603$	$0/96593$	1

حل: داریم $h = \frac{2}{3}$ لذا

$$T(\frac{\pi}{12}) = \frac{\pi}{24}\left[f(0) + 2\left[f(\frac{\pi}{12}) + f(\frac{2\pi}{12}) + f(\frac{3\pi}{12}) + f(\frac{4\pi}{12}) + f(\frac{5\pi}{12})\right] + f(\frac{\pi}{2})\right]$$

$$= \frac{\pi}{24}[2[0/25882 + 0/5 + 0/70711 + 0/86603 + 0/96593] + 1] = 0/994285$$

کتاب، جزوه ، نمونه سوال
www.ModaresineTehran.com

$$\ldots(\frac{\pi}{12}) = \frac{\pi}{36}\left[f(0) + 4f(\frac{\pi}{12}) + 2f(\frac{2\pi}{12}) + 4f(\frac{3\pi}{12}) + 2f(\frac{4\pi}{12}) + 4f(\frac{5\pi}{12}) + f(\frac{\pi}{2})\right]$$

$$= \frac{\pi}{36}[4 \times 0.25882 + 2 \times 0.5 + 4 \times 0.70711 + 2 \times 0.86603 + 4 \times 0.96593 + 1]$$

$$= 1.00003$$

۱۶ـ با استفاده از فرمول نیوتن ـ کاتس چهارنقطه‌ای $(n = 3)$ مقدار $\int_1^3 e^{\frac{-x}{2}}\,dx$ را به دست آورید.

حل:

$$\int_1^3 e^{\frac{-x}{2}}\,dx \cong \frac{3}{8}h[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)]$$

$$= \frac{2}{8}\left[f(1) + 3f(\frac{5}{3}) + 3f(\frac{7}{3}) + f(3)\right]$$

$$= \frac{2}{8}\left[e^{\frac{-1}{2}} + 3e^{\frac{-5}{6}} + 3e^{\frac{-7}{6}} + e^{\frac{-3}{2}}\right]$$

$$= \frac{2}{8}\left[e^{-\frac{1}{2}} + 3e^{\frac{-5}{6}} + 3e^{\frac{-7}{6}} + e^{\frac{-3}{2}}\right] = 0.76692$$

۱۷ـ با استفاده از فرمول نیوتن کاتس چهارنقطه‌ای $(n = 3)$ تقریبی از انتگرال‌های زیر به دست آورید.

الف. $\int_0^1 \sqrt{1 + x}\,dx$

حل:

$$\int_0^1 \sqrt{1 + x}\,dx = \frac{1}{8}\left[f(0) + 3f(\frac{1}{3}) + 3f(\frac{2}{3}) + f(1)\right]$$

$$= \frac{1}{8}\left[1 + 3\sqrt{\frac{4}{3}} + 3\sqrt{\frac{5}{3}} + \sqrt{2}\right] = 1.21891$$

ب. $\int_1^{1.5} e^x\,dx$

حل:

$$\int_1^{1.5} e^x\,dx \cong \frac{3h}{8}[f(1) + 3f(\frac{7}{6}) + 3f(\frac{8}{6}) + f(1.5)]$$

$$= \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{6}[2.718281828 + 3(3.211270543) +$$

$$3(3.793667895) + 4.481689070]$$

$$= \frac{1}{16}[28.21478621] = 1.763424138$$

۱۸ـ مقدار $\int_1^{1.5} e^{-x^2}\,dx$ را به روش نیوتن ـ کاتس و با $h = \frac{1}{6}$ را به دست آورید.

کتاب، جزوه ، نمونه سوال
www.ModaresineTehran.com

حل:

$$\int_{۱}^{۱٫۵} e^{-x^۲}dx = \frac{۳}{۸}\times\frac{۱}{۶}\left[f(۱)+۳f(\frac{۷}{۶})+۳f(\frac{۴}{۳})+f(۱٫۵)\right]$$

$$= \frac{۱}{۱۶}\left[e^{-۱}+۳e^{\frac{-۴۹}{۳۶}}+۳e^{\frac{-۱۶}{۹}}+e^{۲٫۲۵}\right] = ۰٫۱۰۹۳۴$$

۱۹ـ مقدار انتگرال مسأله ۱۸ را با روش گاوس دونقطه‌ای به دست آورید.

حل:

$$\int_{-۱}^{۱} f(x)dx \cong f(-\frac{\sqrt{۳}}{۳})+f(\frac{\sqrt{۳}}{۳})$$

$$x = \frac{۱}{۲}[(b-a)u+(b+a)] \quad , \quad dx = \frac{b-a}{۲}du$$

لذا برای $a = ۱$ و $b = ۱٫۵$ خواهیم داشت:

$$x = \frac{۰٫۵u+۲٫۵}{۲} \quad , \quad dx = \frac{۰٫۵}{۲}du$$

$$\int_{۱}^{۱٫۵} e^{-x^۲}dx = \frac{۰٫۵}{۲}\int_{-۱}^{۱} e^{-\frac{(۰٫۵u+۲٫۵)^۲}{۴}}du$$

$$f(x) = e^{-\frac{(۰٫۵x+۲٫۵)^۲}{۴}} \quad , \quad f(\frac{\sqrt{۳}}{۳}) = e^{-۱٫۹۴۴۱۷۷} \quad , \quad f(\frac{-\sqrt{۳}}{۳}) = e^{-۱٫۲۲۲۴۸۹۴}$$

$$\int_{۱}^{۱٫۵} e^{-x^۲}dx = ۰٫۲۵\left[f(\frac{\sqrt{۳}}{۳})+f(\frac{-\sqrt{۳}}{۳})\right] = ۰٫۱۰۹۴۰۰$$

۲۰ـ مقدار انتگرال مسأله ۱۸ را با روش گاوس سه‌نقطه‌ای به دست آورید.

حل:

$$\int_{-۱}^{۱} f(x)dx \cong \frac{۱}{۹}\left[۵f(-\sqrt{\frac{۳}{۵}})+۸f(۰)+۵f(\sqrt{\frac{۳}{۵}})\right]$$

$$\int_{۱}^{۱٫۵} e^{-x^۲}dx = \frac{۰٫۵}{۲}\int_{-۱}^{۱} e^{-(\frac{۰٫۵u+۲٫۵}{۲})^۲}du$$

$$f(x) = e^{-(\frac{۰٫۵x+۲٫۵}{۲})^۲}$$

$$f(۰) = e^{-۱٫۵۶۲۵} \quad f(\sqrt{\frac{۳}{۵}}) = e^{-۲٫۰۸۴۱۲۲۹۲} \quad , \quad f(-\sqrt{\frac{۳}{۵}}) = e^{-۱٫۱۱۵۸۷۷۰۸}$$

$$\int_{۱}^{۱٫۵} e^{x^۲}dx = \frac{۰٫۵}{۲}\times\frac{۱}{۹}[۵\times e^{-۱٫۱۱۵۸۷۷۰۸۴}+۸\times e^{-۱٫۵۶۲۵}+۵\times e^{-۲٫۰۸۴۱۲۲۹۲}]$$

$$= ۰٫۱۰۹۳۶۴۱۹۶$$

۲۱ـ مقدار $\int_{۱}^{۲} e^{x}\sin x dx$ را با روش گاوس دونقطه‌ای به دست آورید.

کتاب، جزوه ، نمونه سوال
www.ModaresineTehran.com

حل: تغییر متغیر زیر را انجام می‌دهیم:

$$x = \frac{1}{2}[(b-a)u + (b+a)] \quad \text{و} \quad dx = \frac{b-a}{2}du$$

$$x = u + 2 \Rightarrow dx = du$$

$$\int_1^3 e^x \sin x\,dx = \int_{-1}^1 e^{u+2}\sin(u+2)\,du$$

$$f(x) = e^{x+2}\sin(x+2)$$

$$f(\frac{\sqrt{3}}{3}) = 7{,}038842223 \quad , \quad f(-\frac{\sqrt{3}}{3}) = 4{,}102660422$$

$$\int_1^3 e^x \sin x\,dx = 11{,}14149$$

۲۲ـ مقدار انتگرال مسأله ۲۱ را با روش گاوس سه نقطه‌ای به دست آورید.

حل: تغییر متغیر زیر را انجام می‌دهیم:

$$x = u + 2 \quad dx = du$$

$$\int_1^3 e^x \sin x\,dx = \int_{-1}^1 e^{u+2}\sin(u+2)\,du \quad , \quad f(x) = e^{x+2}\sin(x+2)$$

$$f(0) = 6{,}718849 \,,\quad f(\sqrt{\frac{3}{5}}) = 5{,}752548 \,,\quad f(-\sqrt{\frac{3}{5}}) = 3{,}204416622$$

$$\int_1^3 e^x \sin x\,dx = \frac{1}{9}[5 \times 3{,}20417 + 8 \times 6{,}71884 + 5 \times 5{,}75255] = 10{,}948395$$

۲۳ـ تقریبهایی را از انتگرالهای زیر به قاعده نقطه میانی و به ازای h های داده شده به دست آورید.

الف. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x} \quad , \quad h = 0{,}1$

حل: با $f(x) = \frac{1}{1+x}$:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \cong M(h) = h\left[f(x_0 + \frac{h}{2}) + \cdots + f(x_i + \frac{h}{2}) + \cdots + f(x_{n-1} + \frac{h}{2})\right]$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = 0{,}1[f(0{,}05) + f(0{,}15) + f(0{,}25) + f(0{,}35) + f(0{,}45) + f(0{,}55)$$
$$+ f(0{,}65) + f(0{,}75) + f(0{,}85) + f(0{,}95)] = 0{,}6928353$$

کتاب، جزوه ، نمونه سوال
www.ModaresineTehran.com

ب. $\int_{۰}^{۱} \frac{dx}{۱+x^{۲}} \quad , \quad h = ۰/۲$

$$\int_{۰}^{۱} \frac{dx}{۱+x^{۲}} = ۰/۲[f(۰/۱) + f(۰/۳) + f(۰/۵) + f(۰/۶) + f(۰/۷) + f(۰/۹)]$$
$$= ۰/۲[۴/۶۶۶۴۵۱۴۴] = ۰/۹۳۳۲۹۰۲۸$$

پ. $\int_{۰}^{۱} \frac{\sin x}{x} dx \quad , \quad h = ۰/۲$

$$\int \frac{\sin x}{x} dx = ۰/۲[f(۰/۱) + f(۰/۳) + f(۰/۵) + f(۰/۷) + f(۰/۹)] =$$
$$= ۰/۲[\frac{\sin ۰/۱}{۰/۱} + \frac{\sin ۰/۳}{۰/۳} + \frac{\sin ۰/۵}{۰/۵} + \frac{\sin ۰/۷}{۰/۷} + \frac{\sin ۰/۹}{۰/۹}] = ۰/۹۴۶۵۸۵$$

۲۴ـ تقریبی از $\int_{۰}^{۱} \frac{dx}{\sqrt{۱-x^{۲}}}$ حساب کنید. برای این منظور قرار دهید:

$$\int_{۰}^{۱} \frac{dx}{\sqrt{۱-x^{۲}}} = \int_{۰}^{۰/۹} \frac{dx}{\sqrt{۱-x^{۲}}} + \int_{۰/۹}^{۱} \frac{dx}{\sqrt{۱-x^{۲}}}$$

سپس به روش قاعده نقطه میانی و $h = ۰/۰۱$ مقدار $\int_{۰/۹}^{۱} \frac{dx}{\sqrt{۱-x^{۲}}}$ و $h = ۰/۱$ مقدار $\int_{۰}^{۰/۹} \frac{dx}{x}$ را حساب کنید.

حل:

$$\int_{۰}^{۱} \frac{dx}{\sqrt{۱-x^{۲}}} = \int_{۰}^{۰/۹} \frac{dx}{\sqrt{۱-x^{۲}}} + \int_{۰/۹}^{۱} \frac{dx}{\sqrt{۱-x^{۲}}}$$

داریم:

$$\int_{۰/۹}^{۱} \frac{dx}{\sqrt{۱-x^{۲}}} = ۰/۰۱[f(۰/۹۰۵) + f(۰/۹۱۵) + f(۰/۹۲۵) + f(۰/۹۳۵) + f(۰/۹۴۵)$$
$$+ f(۰/۹۵۵) + f(۰/۹۶۵) + f(۰/۹۷۵) + f(۰/۹۸۵) + f(۰/۹۹۵)]$$

$$\int_{۰/۹}^{۱} \frac{dx}{\sqrt{۱-x^{۲}}} = ۰/۰۱[\frac{۱}{۰/۴۲۵۴۱} + \frac{۱}{۰/۴۰۳۴۵} + \frac{۱}{۰/۳۷۹۹۶} + \frac{۱}{۰/۳۵۴۶۵} + \frac{۱}{۰/۳۲۷۰۷}$$
$$+ \frac{۱}{۰/۲۹۶۶۰۵} \frac{۱}{۰/۲۶۲۲۴} + \frac{۱}{۰/۲۲۲۲۰} + \frac{۱}{۰/۱۷۲۵۵} + \frac{۱}{۰/۰۹۹۸۷۴}] = ۰/۴۰۸۳۱۶$$

کتاب، جزوه ، نمونه سوال
www.ModaresineTehran.com

$$\int_{۰}^{۰٫۹} \frac{dx}{\sqrt{۱-x^{۲}}} \cong ۰٫۱[f(۰٫۰۵)+f(۰٫۱۵)+f(۰٫۲۵)+f(۰٫۳۵)+f(۰٫۴۵)$$
$$+f(۰٫۵۵)+f(۰٫۶۵)+f(۰٫۷۵)+f(۰٫۸۵)+f(۰٫۹۵)]$$
$$=۰٫۱[\frac{۱}{۰٫۹۹۸۷۴}+\frac{۱}{۰٫۹۸۸۶۸}+\frac{۱}{۰٫۹۶۸۲۴}+\frac{۱}{۰٫۹۳۶۷۴}+\frac{۱}{۰٫۸۹۳۰۲}$$
$$+\frac{۱}{۰٫۸۳۵۱۶۴}+\frac{۱}{۰٫۷۵۹۹۳}+\frac{۱}{۰٫۶۶۱۴۳}+\frac{۱}{۰٫۵۲۶۷۸}+\frac{۱}{۰٫۳۱۲۲۴۹}]=۱٫۴۳۵۸۸۹۴$$

بنابراین
$$\int_{۰}^{۱} \frac{dx}{\sqrt{۱-x^{۲}}}dx \cong ۱٫۴۳۵۸۸۹۴+۰٫۴۰۸۳۱۶=۱٫۸۴۴۲۰۵$$

۲۵ـ تقریبی از $\int_{۰}^{۲} x\sin ۲x dx$ را به قاعده ذوزنقه‌ای چنان حساب کنید که خطای آن کمتر از ۰٫۵ باشد.

حل: داریم $b=۲$ ، $a=۰$ و $\varepsilon=۰٫۵$ و $|E(T(h))| \leqslant \frac{(b-a)}{۱۲}h^{۲}M_{۲}$

$$f''(x)=۴\cos ۲x-۴x\sin ۲x$$
$$|f''(x)|=|۴\cos ۲x-۴x\sin ۲x| \leqslant ۴|\cos ۲x|+۴|x||\sin ۲x| \leqslant ۱۲=M_{۲}$$

لذا بایستی
$$\frac{(۲-۰)}{۱۲}h^{۲}(۱۲) \leqslant ۰٫۵$$

و یا
$$h^{۲} \leqslant \frac{۰٫۵}{۲} \Rightarrow h^{۲} \leqslant ۰٫۲۵ \Rightarrow h \leqslant ۰٫۵$$

بنابراین قرار می‌دهیم $h=۰٫۵$ و $T(۰٫۵)$ را حساب می‌کنیم.

$$T(۰٫۵)=\frac{۰٫۵}{۲}(۰+۲(۰٫۵\sin ۱+\sin ۲+۱٫۵\sin ۳)+۲\sin ۴)=۰٫۳۹۲۴۵$$

۲۶ـ تقریبی از انتگرالهای زیر را با خطای کمتر از ۰٫۰۰۰۱ و به قاعده ذوزنقه‌ای حساب کنید.

الف. $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \cos x dx$ ب. $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} x\cos x dx$ پ. $\int_{۰}^{۱} e^{x} dx$

کتاب، جزوه ، نمونه سوال
www.ModaresineTehran.com

حل: الف.

$$f(x) = \cos x \Rightarrow f''(x) = -\cos x$$

$$|f''(x)| \leqslant ۱ = M_۲$$

$$\frac{(b-a)}{۱۲}h^۲ M_۲ \leqslant ۰/۰۰۰۰۱$$

$$\frac{\pi}{۲۴}h^۲ \leqslant ۰/۰۰۰۰۱ \Rightarrow h^۲ \leqslant \frac{۰/۰۰۰۰۱ \times ۲۴}{\pi} = \frac{۰/۰۰۰۲۴}{\pi}$$

$$h \leqslant ۰/۰۲۷ \qquad h = ۰/۰۲۷$$

$$n = \frac{b-a}{h} = \frac{\frac{\pi}{۲}}{۰/۰۲۷} = ۵۸$$

ب.

$$f(x) = x\cos x \Rightarrow f''(x) = -\sin x - \sin x - x\cos x$$

$$|f''(x)| \leqslant ۲ + \frac{\pi}{۲} \Rightarrow M_۲ = ۴$$

$$\frac{(b-a)}{۱۲}h^۲ \times ۴ \leqslant ۰/۰۰۰۰۱ \Rightarrow \frac{\pi h}{۶} \leqslant ۰/۰۰۰۰۱ \Rightarrow h \leqslant ۰/۰۱۳۸۱$$

$$n = \frac{b-a}{h} = \frac{\frac{\pi}{۲}}{۰/۱۳۱۸۱} = ۱۱۳/۶۶۹۳ \Rightarrow n = ۱۱۴$$

پ.

$$f(x) = e^x \Rightarrow f''(x) = e^x$$

$$|e^x| \leqslant ۲/۷۱ \Rightarrow \frac{۲/۷۱h^۲}{۱۲} \leqslant ۰/۰۰۰۰۱ \Rightarrow h^۲ \leqslant \frac{۰/۰۰۰۱۲}{۲/۷۱} = ۰/۰۲۱۰۴$$

$$h = ۰/۰۲ \Rightarrow n = \frac{b-a}{h} = \frac{۱}{۰/۰۲} = ۵۰ \Rightarrow n = ۵۰$$

توجه داشته باشید که در تمام قسمتها به علت بزرگ بودن n محاسبه تقریبی از انتگرال‌های داده شده با دست امکانپذیر نیست و نیاز به یک برنامه کامپیوتری دارد.

۲۷ـ حدود h را برای محاسبه تقریبی $\int_۰^۱ e^x \sin x dx$ چنان تعیین کنید که:

الف. داشته باشیم $|ET(h)| \leqslant ۱۰^{-۵}$

ب. داشته باشیم $|ES(h)| \leqslant ۱۰^{-۵}$

کتاب، جزوه ، نمونه سوال
www.ModaresineTehran.com

حل: الف.

$$f(x) = e^x \sin x dx \rightarrow f''(x) = ۲e^x \cos x$$

$$|f''(x)| = |۲e^x \cos x| \leqslant ۲ \times ۲/۷۱۸۲۸۱۸۲۸ = ۵/۴۳۶۵۶۳۶۵۷ = M_۲$$

$$ET(h) = \frac{-(b-a)}{۱۲} h^۲ M_۲$$

$$\frac{۱}{۱۲} h^۲ \times ۵/۴۳۶۵۶۳۶۵۷ \leqslant ۱۰^{-۵}$$

$$h^۲ \leqslant \frac{۱۲ \times ۱۰^{-۵}}{۵/۴۳۶۵۶۳۶۵۷} = ۰/۲۲۰۷۲۷۶۶۴۷ \times ۱۰^{-۴}$$

$$h \leqslant ۰/۰۰۴۶۹۷$$

قرار می‌دهیم $h = ۰/۰۰۴۵$ و از آن $n \simeq ۲۲۳$.

ب.

$$ES(h) = \frac{-(b-a)}{۱۸۰} h^۴ f^{(۴)}(\eta)$$

$$f^{(۴)}(x) = -۴e^x \sin x$$

$$|f^{(۴)}(x)| \leqslant ۴ \times ۲/۷۱ = ۱۰/۸۴ = M_۴$$

$$|ES(h)| = \frac{۱}{۱۸۰} h^۴ \times ۱۰/۸۴ \leqslant ۱۰^{-۵}$$

$$h^۴ \leqslant \frac{۱۸۰ \times ۱۰^{-۵}}{۱۰/۸۴} = ۱/۶۶۰۵۴۵۷۴۸ \times ۱۰^{-۴}$$

و از آن $h \leqslant ۰/۱۱۳۴۳$ و از آن $n = \frac{(b-a)}{h} = ۹$

۲۸ـ روش انتگرال‌گیری زیر را درنظر بگیرید

$$\int_۰^h f(\sqrt{x})dx \cong w_۱ f(۰) + w_۲ f(۰) + w_۳ f(h)$$

ضرایب $w_۱, w_۲, w_۳$ را طوری به دست آورید که روش انتگرال‌گیری فوق برای چندجمله‌ای‌های تا درجه دو دقیق باشند.

حل: فرمول بالا را برای $f(x) = ۱, x, x^۲$ به کار می‌بریم (که این فرمول برای این توابع دقیق درنظر گرفته

کتاب، جزوه ، نمونه سوال
www.ModaresineTehran.com

می‌شود.)

$$f(x) = ۱ \Rightarrow \int_{۰}^{h} ۱dx = h = w_{۱} + ۰ + w_{۳}$$

$$f(x) = x \Rightarrow \int_{۰}^{h} \sqrt{x}dx = \int_{۰}^{h} x^{\frac{۱}{۲}}dx = [\frac{۲}{۳}x^{\frac{۳}{۲}}]_{۰}^{h} = \frac{۲}{۳}h^{\frac{۳}{۲}} = ۰ + w_{۲} + w_{۳}h$$

$$f(x) = x^{۲} \Rightarrow \int_{۰}^{h} xdx = \frac{h^{۲}}{۲} = ۰ + ۰ + h^{۲}w_{۳}$$

$$w_{۱} + w_{۳} = h$$

$$w_{۲} + w_{۳}h = \frac{۲}{۳}h^{\frac{۳}{۲}}$$

$$w_{۳}h^{۲} = \frac{h^{۲}}{۲} \Rightarrow w_{۳} = \frac{۱}{۲}$$

$$w_{۲} = \frac{۲}{۳}h^{\frac{۳}{۲}} - \frac{h}{۲} \quad , \quad w_{۱} = h - \frac{۱}{۲}$$

۲۹ـ فرض کنید در تقریب زیر معیار دقت آن باشد که رابطه برای چندجمله‌ای‌های تا درجه ۳ دقیق باشد:

$$\int_{۰}^{۶} f(x)dx \cong \sum_{i=۰}^{۳} w_{i}f(x_{i})$$

که در آن $x_{۰} = ۰$ ، $x_{۱} = ۲$ ، $x_{۲} = ۵$ ، $x_{۳} = ۶$ مطلوبست محاسبه w_{i} برای $i = ۰, ۱, ۲, ۳$

حل:

$$\int_{۰}^{۶} f(x)dx \cong w_{۰}f(x_{۰}) + w_{۱}f(x_{۱}) + w_{۲}f(x_{۲}) + w_{۳}f(x_{۳})$$

$$\int_{۰}^{۶} f(x)dx \cong w_{۰}f(۰) + w_{۱}f(۲) + w_{۲}f(۵) + w_{۳}f(۶)$$

فرمول بالا را برای $f(x) = ۱, x, x^{۲}, x^{۳}$ بکار می‌بریم:

$$f(x) = ۱ \Rightarrow \int_{۰}^{۶} dx = w_{۰} + w_{۱} + w_{۲} + w_{۳} = ۶$$

$$f(x) = x \Rightarrow \int_{۰}^{۶} xdx = ۲w_{۱} + ۵w_{۲} + ۶w_{۳} = ۱۸$$

$$f(x) = x^{۲} \Rightarrow \int_{۰}^{۶} x^{۲}dx = ۴w_{۱} + ۲۵w_{۲} + ۳۶w_{۳} = ۷۲$$

$$f(x) = x^{۳} \Rightarrow \int_{۰}^{۶} x^{۳}dx = ۸w_{۱} + ۱۲۵w_{۲} + ۲۱۶w_{۳} = ۳۲۴$$

کتاب، جزوه ، نمونه سوال
www.ModaresineTehran.com

$$w_۰ + w_۱ + w_۲ + w_۳ = ۶$$
$$۲w_۱ + ۵w_۲ + ۶w_۳ = ۱۸$$
$$۴w_۱ + ۲۵w_۲ + ۳۶w_۳ = ۷۲$$
$$۸w_۱ + ۱۲۵w_۲ + ۲۱۶w_۳ = ۳۲۴$$

از حل دستگاه بالا داریم

$$w_۰ = \frac{۳}{۵} \quad , \quad w_۱ = ۳ \quad , \quad w_۲ = \frac{۱۲}{۵} \quad , \quad w_۳ = ۰$$

۳۰- برای محاسبه تقریبی از انتگرال تابع f در فاصله $[۰,۶]$ از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$\int_۰^{۶h} f(x)dx \cong w_۱ f(h) + w_۲ f(۳h) + w_۳ f(۵h)$$

الف. ضرایب $w_۱, w_۲, w_۳$ را چنان تعیین کنید که رابطه فوق برای چندجمله‌ای‌های تا درجه ۲ دقیق باشد.

حل: فرض می‌کنیم که رابطه فوق برای چندجمله‌ای‌های تا درجه ۲ دقیق باشد.
فرمول بالا را برای $f(x) = ۱, x, x^۲$ بکار می‌بریم

$$f(x) = ۱ \Rightarrow \int_۰^{۶h} dx = ۶h = w_۱ + w_۲ + w_۳$$
$$f(x) = x \Rightarrow \int_۰^{۶h} xdx = [\frac{x^۲}{۲}]_۰^{۶h} = \frac{۳۶}{۲}h^۲ = ۱۸h^۲ = hw_۱ + ۳hw_۲ + ۵hw_۳$$
$$f(x) = x^۲ \Rightarrow \int_۰^{۶h} xdx = [\frac{x^۳}{۳}]_۰^{۶h} = ۷۲h^۳ = h^۲w_۱ + ۹h^۲w_۲ + ۲۵h^۲w_۳$$

$$w_۱ + w_۲ + w_۳ = ۶h$$
$$w_۱ + ۳w_۲ + ۵w_۳ = ۱۸h$$
$$w_۱ + ۹w_۲ + ۲۵w_۳ = ۷۲h$$

از حل دستگاه بالا داریم:

$$w_۱ = \frac{۹}{۴}h \quad , \quad w_۲ = \frac{۳}{۲}h \quad , \quad w_۳ = \frac{۹}{۴}h$$

کتاب، جزوه ، نمونه سوال
www.ModaresineTehran.com

ب. نشان دهید قاعده فوق برای چندجمله‌ای‌های درجه ۳ دقیق است.

$$f(x)=x^3 \Rightarrow \int_0^{6h} x^3 = 324h^4$$

از طرف دیگر باتوجه به رابطه داریم

$$\frac{9}{4}h^4+\frac{3}{2}h\times 27h^3+\frac{9}{4}h^4\times 125=324h^4$$

که با مقدار دقیق انتگرال‌گیری برابر است.

۳۱ـ قسمت‌های الف و ب مسأله قبل را در مورد روند انتگرال‌گیری زیر انجام دهید.

$$\int_{-h}^{h} f(x)dx \cong h[w_1 f(-h)+w_2 f(0)+w_3 f(h)]$$

حل: فرض می‌کنیم که فرمول فوق برای چندجمله‌ای‌های تا درجه ۳ دقیق باشد قرار می‌دهیم

$$f(x)=1,x,x^2$$

$$f(x)=1 \Rightarrow \int_{-h}^{h} dx=2h=h[w_1+w_2+w_3]$$

$$f(x)=x \Rightarrow \int_{-h}^{h} xdx=0=h[-w_1h+hw_3]$$

$$f(x)=x^2 \Rightarrow \int_{-h}^{h} x^2dx=\frac{2h^3}{3}=h[w_1h^2+w_3h^2]$$

$$w_1+w_2+w_3=2$$

$$-w_1+w_3=0$$

$$w_1+w_3=\frac{2}{3}$$

از حل دستگاه بالا داریم

$$w_1=\frac{1}{3}\quad,\quad w_2=\frac{4}{3}\quad,\quad w_3=\frac{1}{3}$$

برای $f(x)=x^3$ داریم

مقدار انتگرال: $\int_{-h}^{h} x^3dx=0$

مقدار به دست آمده از فرمول: $h[\frac{-h^3}{3}+0+\frac{h^3}{3}]=0$

که هردو با هم برابرند، لذا قاعده بیان شده برای چندجمله‌ای‌های تا درجه ۳ نیز دقیق است.

کتاب، جزوه ، نمونه سوال
www.ModaresineTehran.com

«مسائل تکمیلی فصل چهارم»

۱ـ مقدار $\int_{0}^{5} \frac{x^{5}}{5} dx$ را با استفاده از روش ذوزنقه‌ای به ازای $h = \frac{1}{4}$ و $h = \frac{1}{2}$ به دست آورید.

۲ـ مقدار $\int_{0}^{2} \sqrt[3]{x^{2}} dx$ را با استفاده از روش سیمپسون و با $S(0/25)$ به دست آورید.

۳ـ مقدار $\int_{0}^{1} \frac{\sec x}{x} dx$ را با $S(0/5)$ به دست آورید.

۴ـ مقدار $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \tan x dx$ را به روش سیمپسون و با $h = \frac{\pi}{16}$ و $h = \frac{\pi}{8}$ به دست آورید.

۵ـ مقدار $\int_{0}^{1} \frac{1}{1+x^{2}} dx$ را با $h = 0/5$ یک بار با استفاده از روش ذوزنقه‌ای و یک‌بار از روش سیمپسون به دست آورید و نتایج هردو را با مقدار واقعی انتگرال مقایسه کنید.

۶ـ با استفاده از روش نیوتن ـ کاتس چهار نقطه‌ای مقدار انتگرال $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} x^{2} \sec^{2} x dx$ را تقریب بزنید.

۷ـ با استفاده از روش نیوتن ـ کاتس چهارنقطه‌ای مقدار انتگرال مربوط سؤال ۴ را حل نمایید و جواب به دست آمده با جواب به دست آمده در سؤال ۴ و همچنین با مقدار واقعی انتگرال مقایسه کنید.

۸ـ مقدار $\int_{0}^{1/5} e^{x} \sin x dx$ را با $h = \frac{1}{4}$ و با استفاده از روش نیوتن ـ کاتس به دست آورید.

۹ـ مقدار انتگرال مسأله ۳ را با استفاده از روش گاوس دونقطه‌ای به دست آورید.

۱۰ـ مقدار انتگرال مسأله ۵ را با استفاده از روش گاوس دونقطه‌ای به دست آورید.

۱۱ـ مقدار $\int_{0}^{2} x \tan^{-1} x dx$ را با استفاده از روش گاوس دونقطه‌ای و سه‌نقطه‌ای به دست آورید.

۱۲ـ مقدار $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx$ را با استفاده از روش گاوس دونقطه‌ای و سه‌نقطه‌ای به دست آورید جواب به دست آمده را با مقدار واقعی انتگرال مقایسه کنید.

۱۳ـ مقدار $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^{2}-1} dx$ را با یک روش مناسب به دست آورید. h را بگونه‌ای انتخاب کنید که خطا کمتر از ۰/۰۰۱ باشد.

۱۴ـ کران بالای خطای انتگرال داده شده در سؤال ۳ را به دست آورید.

۱۵ـ کران بالای خطای انتگرال داده شده در سؤال ۱ را به دست آورید و آن را با خطای واقعی مقایسه کنید.

۱۶ـ مقدار انتگرال سؤال ۱ را با استفاده از روش نقطه میانی به دست آورید و میزان خطای واقعی آن را با خطای واقعی مقادیر به دست آمده در سؤال ۱ مقایسه کنید.

کتاب، جزوه ، نمونه سوال
www.ModaresineTehran.com

۱۷ـ مقدار انتگرال $\int_{0}^{2} x^{2}e^{x}\, dx$ را با استفاده از روش سیمپسون چنان بیابید که خطا کمتر از ۰٫۰۵ باشد.

۱۸ـ مقدار انتگرال سؤال قبل را با استفاده از روش ذوزنقه‌ای چنان بیابید که خطا کمتر از ۰٫۰۵ باشد.

۱۹ـ تابع $f(x)$ بر بازه $[0, 1]$ به صورت زیر تعریف شده است:

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} \\ 1 - x & \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

مقدار $\int_{0}^{1} f(x)dx$ را با به کار بردن قاعده‌های زیر حساب کنید.

الف : قاعده ذوزنقه

ب : قاعده سیمپسون

ج : قاعده دونقطه‌ای گاوس

۲۰ـ مقدار مشتق تابع $f(x) = e^{x} + \cos x$ را در نقطه $x = 2$ با استفاده از روابط (۸) و (۹) بیابید و آن را با مقدار واقعی مشتق مقایسه کنید.

۲۱ـ تابع جدولی زیر مفروض است مقدار f'_1 و f'_2 و f''_2 را حساب کنید.

x_i	۰	۱	۲	۳
f_i	۲٫۹۶۷	۳٫۲۶	۴٫۹۳	۵٫۰۶

۲۲ـ مقدار مشتق دوم تابع $f(x) = x^{3}\tan^{-1} x$ را به ازای $h = 0.5$ در نقطه $x = 5$ محاسبه کنید. (با استفاده از فرمول ۱۴)

۲۳ـ مقدار مشتق اول تابع داده شده در سؤال قبل را با استفاده از رابطه (۱۲) حساب کنید.

۲۴ـ مقدار مشتق تابع $f(x) = \frac{x}{\tan x}$ را با استفاده از روابط ۹ و ۱۲ در نقطه $x = 2$ و با $h = 0.25$ به دست آورید. در هر مورد مقدار به دست آمده را با مقدار واقعی $f'(2)$ مقایسه کنید.

۲۵ـ تابع جدولی زیر مفروض است. مقدار $f'_{i+\frac{1}{2}}$ را برای $i = 0, 1, 2, 3$ برای آن بیابید.

x_i	۰٫۵	۱	۱٫۵	۲	۲٫۵	۳
f_i	۱٫۷۵	۱٫۹۸	۲٫۱۸۹	۲٫۹۷۶	۲٫۵	۲٫۸

کتاب، جزوه ، نمونه سوال
www.ModaresineTehran.com

۲۶ـ با استفاده از روش سیمپسون مقدار انتگرال $\frac{1}{5}\int_0^2 \cos x dx$ را طوری به دست آورید که خطا کمتر از 10^{-5} باشد.

۲۷ـ مطلوب است محاسبه تقریبی $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$:

الف) با روش سیمپسون و با طول گام $h = 0{,}25$.

ب) تعداد نقاط لازم را برای محاسبه مقدار تقریبی انتگرال فوق با روش ذوزنقه‌ای طوری بیابید که خطای کل کمتر از 10^{-3} باشد.

۲۸ـ اگر تابع $f(x)$ به صورت جدولی زیر داده شده باشد:

x_i	۰٫۰۰	۰٫۵۰	۱٫۰۰
f_i	۰٫۰۰	۰٫۵۸	۰٫۸۳

آن‌گاه مطلوب است محاسبه عبارت زیر:

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1}{2} f'(x)}\, dx$$

(توجه شود که در زیر رادیکال مشتق تابع f به کار رفته است.)

۲۹ـ تابع $f(a) = \int_0^{a^2+1} e^{ax^2} dx$ داده شده است. مقدار $f'(0)$ را با یک تقریب دلخواه محاسبه کنید.

(راهنمایی: از تعریف مشتق استفاده کنید.)

۳۰ـ با استفاده از روش رامبرگ دومرحله‌ای با $h = 0{,}4$ تقریبی از انتگرال

$$I = \int_0^{0{,}8} \frac{\sin x}{1+x^2} dx$$

را به دست آورید. (محاسبات را با $4D$ انجام دهید.)

۳۱ـ با استفاده از روش ذوزنقه‌ای و با $h = 0{,}125$ ، $h = 0{,}25$ و $h = 0{,}5$ تقریبی از انتگرال $I = \int_0^{0{,}5} \frac{\cos x}{1+\sqrt{x}} dx$ را با انجام محاسبات تا چهار رقم اعشار به دست آورید. سپس با استفاده از روش رامبرگ و تقریبهای به دست آمده، تقریب بهتری برای I به دست آورید.